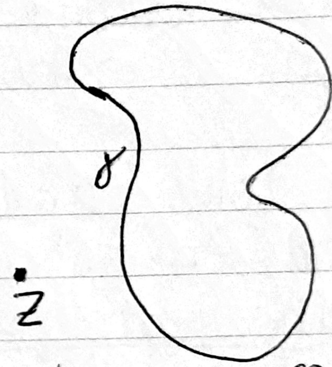
Μάθημα 24ο   19/05/2018

Ορισμός

Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ για δοσμένο $z \in \mathbb{C}$ μια κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε

$$\delta_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \in \mathbb{Z}$$

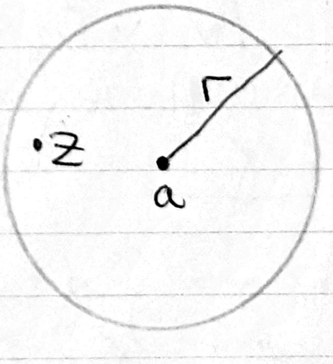


ο δείκτης στροφής της γ γύρω από το z και η συνάρτηση $\delta_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ συνάρτηση στροφής

Παράδειγμα/Άσκηση

Δ.Ο. αν $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$ Τότε

$$\delta_\gamma(z) = \begin{cases} n, & z \in D(a, r) \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r) \end{cases}$$



και για $\tilde{\gamma}(t) = a + re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi n]$

$$\delta_{\tilde{\gamma}}(z) = -n, \quad z \in D(a, r)$$

Θεώρημα και τύπος Cauchy.

Λήμμα (Ολοκληρωτικό λήμμα του Goursat)
Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $p \in \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο $D \setminus \{p\}$ ολόμορφη
[Παρατήρηση: Αν $p \notin D$, τότε $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και όπως θα δούμε αργότερα ολόμορφη $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο $D \setminus \{p\}$ ολόμορφη $\Rightarrow f$ ολόμορφη στο D]

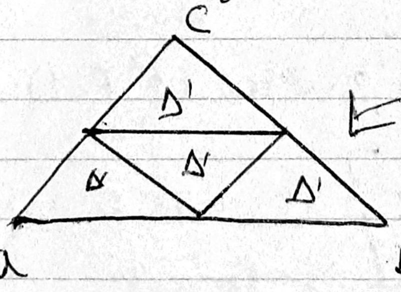
Τότε $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subset D$

Απόδ.

1) $p \notin \Delta$. Έστω $\Delta = \Delta[a,b,c]$ με θετικά προσανατολισμένο σύνορο. Παρατηρούμε ότι

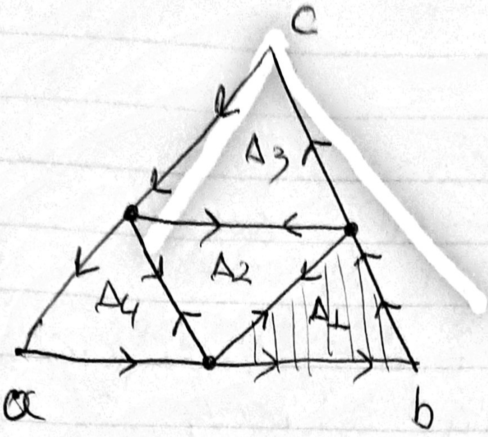
$$\operatorname{diam}(\Delta) = \sup_{z,w \in \Delta} |z-w| \le L(\partial\Delta) \quad (1)$$

και ότι $L(\partial\Delta') = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$ (2) για ένα από τα τέσσερα υποτρίγωνα που σχηματίζονται ενώνοντας με ευθύγραμμα τμήματα τα μέσα των πλευρών του Δ.

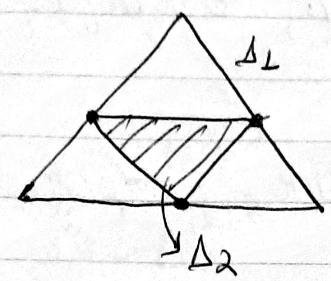


Για συντομία $\alpha(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta$

Χωρίζονται έτσι το Δ σε τέσσερα υποτρίγωνα $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ ισχύει $\alpha(\Delta) = \sum_{i=1}^{4} \alpha(\Delta_i)$
όπου θεωρούμε ότι τα $\partial\Delta$ και $\partial\Delta_i$, $i = 1, \dots, 4$ είναι θετικά προσανατολισμένα



Από αυτά τα τέσσερα Δ_i επιλέγουμε ένα Δ' για το οποίο η τιμή
$$|\alpha(\Delta')| \geq |\alpha(\Delta_i)|, \; i=1,\dots,4$$
$$\Rightarrow |\alpha(\Delta)| \leq 4\,|\alpha(\Delta')|$$



Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή για το Δ' (διαχωρίζουμε σε τέσσερα, επιλέγουμε αυτό για το οποίο η τιμή $|\alpha(\Delta^2)|$ είναι η μεγαλύτερη)

$$|\alpha(\Delta)| \leq 4|\alpha(\Delta')| \leq 4^2|\alpha(\Delta^2)|, \; n \in \mathbb{N}$$

και από (1) ∧ (2) :

$$\operatorname{diam}(\Delta^n) \overset{①}{=} L(\partial\Delta^n) \overset{②}{=} \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \longrightarrow 0$$

$$\underset{\text{Θεωρ. Τοπ.}}{\overset{①}{\Longrightarrow}} \; \exists \; c \in \Delta : \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n = \{c\}$$

Αφού η $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $\exists\, g: D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $g(c) = 0$ και
$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + (z-c)\,g(z), \quad z \in D$$
$$\left[\frac{f(z) - f(c)}{z-c} = f'(c) + g(z), \; z \neq c \right]$$

και επειδή $\int_{\partial\Delta^n} f(c)\,dz = 0$, $\int_{\partial\Delta^n} f'(c)(z-c)\,dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Προκύπτει Θεωρ 1 : $\alpha(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z-c)\,g(z)\,dz, \; n \in \mathbb{N}$

τριγ. ανισ. επιμ. $\Rightarrow |\underbrace{a(\Delta^n)}| \le L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n}$

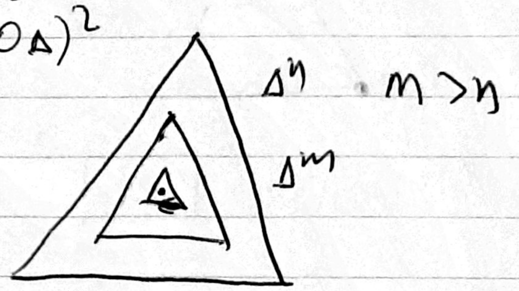
$$\le \underbrace{\max_{z\in\Delta^n} |(z-c)||g(z)|\, L(\partial\Delta^n)}$$

$$\le \underbrace{\left(\max_{z\in\Delta^n}|z-c|\right)}_{\operatorname{diam}\Delta^n \le L(\partial\Delta^n)} \|g\|_{\partial\Delta^n}$$

$|a(\Delta^n)| \le L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{\partial\Delta^n} \Rightarrow \begin{cases} |a(\Delta)| \le 4^n |a(\Delta^n)| \\ L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \end{cases}$

Άρα $|a(\Delta)| \le 4^n |a(\Delta^n)| \le 4^n \underbrace{L(\partial\Delta^n)^2}_{=\frac{1}{4^n}L(\partial\Delta)^2} \|g\|_{\partial\Delta^n}$

$\le L(\partial\Delta)^2 \underbrace{\|g\|_{\partial\Delta^n}}_{n\to\infty} \to 0$



$\Rightarrow a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$

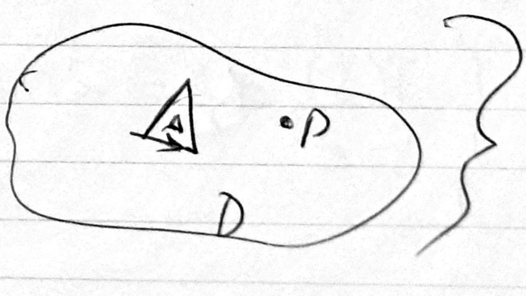
(*) Έστω $\varepsilon > 0$ σταθερό, αφού g συνεχής στο $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \max_{z\in\bar{D}(c,\delta)} |g(z) - g(c)| = \|g - \underbrace{g(c)}_{=0}\|_{\bar{D}(c,\delta)} < \varepsilon$

και εφόσον $\{c\} \subset \Delta^n$ και Δ^n φθίνουσα ακολουθία
το οποίο σημαίνει $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \Delta^n \subset D(c,\delta) \ \forall n \in \mathbb{N}$
$n \ge n_0$ με $\operatorname{diam}\Delta^n \longrightarrow 0$

Προφανώς $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \ge n_0 \ \|g\|_{\partial\Delta^n} < \varepsilon \Leftrightarrow$

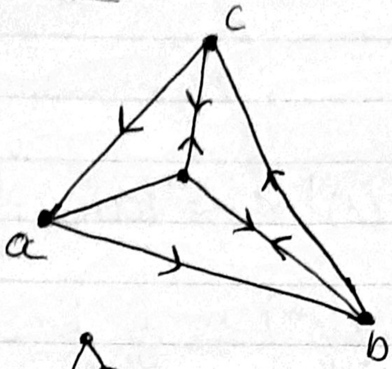
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|g\|_{\partial\Delta^n} = 0$

$\begin{cases} 1.\ p \notin \Delta \end{cases}$

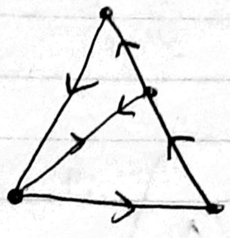


2. $p = a$ με $\Delta = \Delta[a,b,c] \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$

3. $p \in \mathring{\Delta} \rightarrow$ εσωτερικά σημεία του Δ.



4.



Θεώρημα $\boxed{\text{SOS}}$ (Θεώρημα Cauchy και γενικός τύπος Cauchy για αστερόμορφους τόπους)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ αστερόμορφος τόπος με κέντρο a και $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής και στο $D \setminus \{p\}$ ολόμορφη $p \in \mathbb{C}$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και έχει ως παράγουσα της

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad \forall\, z \in D$$

Ειδικότερα $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad \forall\, \gamma$ κλειστή

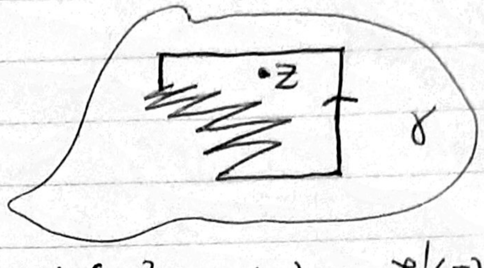
Αν $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και γ κ.τμ C^1 κλειστή στο D. Τότε ισχύει ο γενικός τύπος Cauchy

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i\, \delta_\gamma(z)\, f(z) \quad \forall\, z \in D / \gamma([a,b])$$

<u>Απόδειξη</u> (Θ. Cauchy) Goursat $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f = 0 \ \forall \Delta \subset D \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f = 0 \ \forall \Delta \subset D$ που έχει κορυφή το a $\xrightarrow[\text{Κριτ. ολομ. σε αστεροειδή.}]{\text{Πρόταση 3}}$

$\Rightarrow f$ ολομ. και έχει παράγουσα την $F(z) = \dots$



(Γενικός τύπος Cauchy):

Έστω $z \in D \setminus \gamma([a,b])$

Θεωρούμε $g(\zeta) = \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$ $\zeta \in D\setminus\{z\}$, $g(z) := f'(z)$ η οποία

είναι συνεχής στο D και ολόμορφη στο $D\setminus\{z\}$

$\underline{\text{Θ. Cauchy}}$ $0 = \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - f(z)\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \delta_\gamma(z)$

SOS 1: Cauchy - Riemann
SOS 2: Δυναμοσειρά ⇒ Ολόμορφη
SOS 2': Αναλυτική ⇒ Ολόμορφη
SOS 3: Θεώρημα Cauchy
SOS 3': Τύπος Cauchy

Πόρισμα (SOS 3') Τύπος Cauchy

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $\overline{D}(a,r) \subset D$, $r>0$, $a \in D$. Τότε $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ \forall z \in D(a,r)$

<u>Απόδειξη</u>

$\overline{D}(a,r) \subset D \Rightarrow D(a,r') \subset D$, $r' > r$

Θεωρώντας τον περιορισμό της $f|_{D(a,r')}$ και αφού $D(a,r')$ αστερόμορφος τόπος και $\gamma = \partial D(a,r) \subset D(a,r')$ (*) από το γενικό τύπο Cauchy

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \delta_{\partial D(a,r)}(z) f(z)$$

(*) αφού $z \in D(a,r)$ δηλ. στο εσωτερικό της καμπύλης $\gamma = \partial D(a,r)$ ο οποίος θεωρείται θετικά προσανατ.

$$\oint_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Χάνουμε: 24/05 & 25/05
Τετ: 30/05 : 12-14
Πέμπτη: 31/05 : 9-11
«φροντιστήριο»
Σαββάτο 9/6/18 11-14, 15-17

Αναλυτικότητα Ολόμορφων

Πρόταση

Έστω $\gamma, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\gamma_n \to \gamma$ ομοιόμορφα $\Rightarrow \int_a^b \gamma_n(t)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b \gamma(t)\,dt$

Απόδειξη

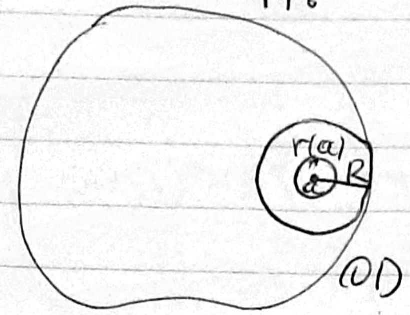
$$\left| \int_a^b \gamma_n - \int_a^b \gamma \right| \le \underbrace{\int_a^b |\gamma_n(t) - \gamma(t)|\,dt}_{\le \|\gamma_n - \gamma\| \to 0} \le (b-a)\|\gamma_n - \gamma\| \to 0$$

Θεώρημα (SOS 4) Θεώρημα [αναπαράστασης] Cauchy-Taylor-αναλυτικότητα Ολόμορφων συναρτήσεων

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: D \to \mathbb{C}$ τότε f ολόμορφη $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f αναλυτική ($\Rightarrow$ η f έχει ολόμορφες μιγ. παραγώγους $f^{(k)}: D \to \mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $f \in C^{\infty}(D)$)

και για κάθε $a \in D$ η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor γύρω από το a:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n,\quad z\in D(\alpha,R),\quad R=dist(\alpha,\partial D)$$



όπου $\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D(\alpha,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^n}\,d\zeta$

$0<r<R$

και γενικότερα $\dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}=\dfrac{1}{2\pi i}\underbrace{\displaystyle\int_{\partial D(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta}_{=\text{Επικαμπύλιο}}\quad \forall z\in D(a,r)$

$\gamma(t)=\alpha+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$ πάνω στον κύκλο $\partial D(a,r)$
με απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\alpha\in D$, D ανοικτό $\Rightarrow \exists\, r(\alpha)>0 : \bar{D}(\alpha,r(\alpha))\subset D$

Έστω $z\in D(a,r(a))$ και $\zeta\in\partial D(\alpha,r(a))$, τότε

$$\left|\frac{z-\alpha}{\zeta-a}\right|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-a}}=\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-\alpha)^n=\frac{f(z)}{\zeta-z},$$ όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς $\zeta\in\partial D(\alpha,r(a))$

$$\Big[\ \max_{\zeta\in\partial D(a,r(a))}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\right|$$

$$\le\frac{\|f\|_{\partial D(\alpha,r(a))}}{r(\alpha)}\left(\frac{|z-\alpha|}{r(a)}\right)^n \text{ με } \frac{|z-\alpha|}{r(\alpha)}<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\ \underset{\Longrightarrow}{\text{προτ.}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r(a))}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r(a))} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta}_{= C_n(a)} (z-a)^n = f(z) \quad \text{τύποι Euler}$$

όπου βλ. Θεώρημα SOS 2 και πόρισμα

$$C_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$